Produit harmonique, sommation de Ramanujan et fonctions zêta d'Arakawa-Kaneko

par

Marc-Antoine COPPO

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques

Présenté et soutenu le 21 juin 2016

au

Laboratoire Jean Alexandre Dieudonné
UMR CNRS 7351

devant le jury

M. Eric DELABAERE, Président du jury
M. Abdelmejid BAYAD, Rapporteur du jury
M. Driss ESSOUABRI, Rapporteur du jury
M. Dominique MANCHON, Rapporteur du jury
M. Bernard CANDELPERGHER, Membre du jury
M. Frédéric PATRAS, Membre du jury
M. Paul Thomas YOUNG, Membre du jury

À la mémoire d'André Cerezo (1945-2003)

Remerciements

Je suis infiniment reconnaissant à mes collègues et amis Bernard Candelpergher et Frédéric Patras de l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée. Sans l'inspiration et la technicité de Bernard, sans l'ouverture d'esprit et le savoir-faire de Frédéric, je n'aurais pu mener à bien ce projet d'habilitation.

Je remercie chaleureusement les rapporteurs, Driss Essouabri, Abdelmejid Bayad et Dominique Manchon, pour l'attention qu'ils ont bien voulu accorder à ce mémoire, les appréciations qu'ils ont portées et les suggestions qu'ils ont exprimées.

Professeur dans l'une des plus anciennes universités américaines, Paul Thomas Young me fait l'honneur de sa présence ; je l'en remercie vivement ainsi que pour la collaboration fructueuse que nous avons entamée.

Je remercie "mon petit camarade" de l'Université de Nice (promotion 1981) Eric Delabaere pour son amitié fidèle, son hospitalité et son soutien sans faille.

Je remercie Yasuo Ohno, Iaroslav Blagouchine, Clemens Berger, Vladimir Kostov et Didier Clamond pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux lors de discussions ou à l'occasion de mes exposés, ainsi que Michel Merle pour les encouragements et les conseils avisés qu'il m'a toujours prodigués.

Enfin, j'adresse mes remerciements sincères à Sorin Dumitrescu et à Clotilde Fermanian pour la confiance qu'ils m'ont témoignée.

Sommaire

Introduction 9

I Le produit harmonique dans l'espace des suites 13

1 Opérateurs dans l'espace des suites 13
- 1.1 Les opérateurs L et R 14
- 1.2 Les opérateurs D et S 15

2 Le produit harmonique des suites 17
- 2.1 L'algèbre $\mathcal{H} = (\mathcal{E}^*, \bowtie)$ 17
- 2.2 Expression explicite du produit harmonique 19
- 2.3 Puissances harmoniques k-ièmes 20
- 2.4 Propriété d'harmonicité 20
- 2.5 Les sommes harmoniques 21

II La sommation de Ramanujan 23

3 L'opérateur D dans l'espace des fonctions 23
- 3.1 Transformation de Laplace-Borel 23
- 3.2 L'opérateur D et le difféomorphisme Λ 24
- 3.3 Sommation de Ramanujan 25

4 Le produit harmonique des fonctions 28
- 4.1 Le Λ-produit de convolution 28
- 4.2 Propriété d'harmonicité 29
- 4.3 La fonction zêta modifiée 30

5 Somme de Ramanujan des nombres hyperharmoniques 33
- 5.1 Nombres hyperharmoniques 33
- 5.2 Séries de Mascheroni décalées à droite 33

III La fonction zêta d'Arakawa-Kaneko 37

6 Valeurs spéciales de la fonction ξ_k 38
- 6.1 Valeurs sur les entier positifs 38
- 6.2 Valeurs sur les entiers négatifs 41

7 La fonction zêta d'Arakawa-Kaneko alternée **42**
7.1 Valeurs spéciales de la fonction β_k 42

Références et publications **45**

Introduction

Ce mémoire s'articule autour des trois principaux thèmes auxquels j'ai consacré mes recherches au cours de ces 15 dernières années, thèmes qui sont assez étroitement reliés entre-eux comme je m'attacherai à le montrer. Il s'agit du *produit harmonique*, du *procédé de sommation de Ramanujan* et de la *fonction zêta d'Arakawa-Kaneko* qui ont fait l'objet des articles [1] à [10] de la liste de publications [1]. Ces travaux se situent au confluent de la combinatoire, de l'algèbre et de la théorie des nombres.

Les principales propriétés du produit harmonique dans l'espace des suites à valeurs complexes ont été exposées dans [3] et sont rappelées dans le chapitre I. Ce produit est défini au moyen d'un opérateur de différence finie noté D (Définitions 5 et 8) qui est une transformation binomiale involutive laissant la suite harmonique invariante (Théorème 1). Les suites invariantes par l'opérateur D sont joliment caractérisées à l'aide du produit harmonique, conduisant à une élégante reformulation algébrique d'un critère d'invariance de Sun (Théorème 4). Le produit harmonique admet une expression explicite qui le fait apparaître comme une déformation du produit de convolution discret (Théorème 5).

Le produit harmonique possède de remarquables propriétés vis-à-vis des sommes harmoniques ; il permet notamment de généraliser les nombres harmoniques de Rota (Théorème 7 et Exemple 12) et de donner une extension naturelle d'une formule de Dilcher (Théorème 8 et Exemple 13).

Le produit harmonique réapparaît dans le chapitre II en relation avec la sommation de Ramanujan. Les propriétés fondamentales du procédé de sommation de Ramanujan des séries divergentes ([Be], chapitre VI) ont été étudiées en détail dans [10] ; récemment, cette étude a été profondément renouvelée et enrichie dans [Ca]. Dans ce chapitre, on se place dans le cadre d'un espace de fonctions analytiques dans le demi-plan $\{ \Re(x) > 0\}$ qui peuvent s'écrire comme des transformées de Laplace ; dans ce cadre, la somme de Ramanujan d'une série peut être définie à l'aide de l'opérateur D et des nombres de Bernoulli de deuxième espèce (Définition 17), et le produit harmonique peut être construit au moyen du produit de convolution des fonctions (Définition 19).

La combinaison du produit harmonique et de la sommation de Ramanujan permet d'introduire d'une manière algébrique une intéressante famille de fonctions analytiques F_k de la variable complexe s, indexée par les entiers naturels, qu'on

1. Les références numérotées [11] à [13] se rattachent à une autre branche des mathématiques et sont sans rapport avec le sujet de ce mémoire.

appelle les *fonctions zêta modifiées*. L'étude des propriétés de ces fonctions a été initiée dans [4], puis poursuivie par Young (cf. [Y3] et [Y4]). Dans le cas où $k = 0$, $F_0(s)$ n'est autre que $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ où $\zeta(s)$ est la valeur en s de la classique fonction zêta de Riemann. Les valeurs spéciales sur les entiers positifs des fonctions zêta modifiées F_k s'expriment à l'aide de sommes infinies qui font intervenir les nombres de Bernoulli de deuxième espèce et les polynômes de Bell modifiés évalués sur les nombres harmoniques (Théorème 18). Lorsque $k = 0$, on retrouve une formule classique due à Hermite [2] (Corollaire 3).

Enfin, on conclut ce chapitre II en présentant dans le paragraphe 5 une élégante expression de la somme de Ramanujan de la série des nombres hyperharmoniques de Conway ([CG] p. 258) qui a été démontrée dans [1]. Plus précisément, on montre que la somme de Ramanujan des nombres hyperharmoniques d'ordre q est une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de $\{1, \gamma, \ln(2\pi)\} \cup \{\zeta'(-k)\}_{k=1}^{q-1}$, où γ désigne la constante d'Euler (Corollaire 5 et Exemple 22).

Le chapitre III est consacré aux valeurs spéciales de la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko. Ces valeurs ont d'abord été étudiées par Arakawa et Kaneko ([AK]) puis par Ohno qui a donné une remarquable expression des valeurs spéciales de la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko sur les entiers positifs en terme de “multiple zeta-star values” ([O1], Théorème 2). Cette famille de fonctions analytiques ξ_k de la variable complexe s, indexée par les entiers positifs, généralise la classique fonction zêta de Riemann au travers de la relation $\xi_1(s) = s\zeta(s+1)$.

Dans [5], la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko a été reconsidérée d'un point de vue plus général en s'inspirant du modèle suivant lequel la fonction zêta d'Hurwitz englobe la fonction zêta de Riemann comme un cas particulier (Définition 24). Pour ce faire, on introduit une seconde variable x de partie réelle positive de telle sorte que $\xi_k(s, x)$ n'est autre que $\xi_k(s)$ lorsque $x = 1$. Sur les valeurs entières et négatives de s, la fonction $\xi_k(s, x)$ interpole les polynômes de poly-Bernoulli (Théorème 23), tandis que ses valeurs sur les entiers positifs peuvent s'exprimer au moyen de sommes infinies qui font intervenir les polynômes de Bell modifiés évalués sur les nombres harmoniques généralisés (Théorème 21) ; cette expression est similaire à celle donnée pour la fonction zêta modifiée F_k au chapitre II précédent, l'explication de cette analogie étant contenue dans la Remarque 12.

Ces remarquables propriétés font de la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko généralisée $\xi_k(s, x)$ (ainsi que de sa variante "alternée" $\xi_k^*(s, x)$) un puissant outil pour l'étude des sommes d'Euler [3] (cas où x prend la valeur 1) et des sommes binomiales

2. Cette formule apparaît pour la première fois dans une lettre de Hermite à Pincherle datée du 10 août 1900.

3. Introduites par Euler et Goldbach au milieu du 18ème siècle, les *sommes d'Euler* sont aussi appelées *valeurs zêta multiples* ou *nombres polyzêtas*.

inverses[4] (cas où x prend la valeur 1/2), comme l'ont montré les belles identités obtenues dans [2] (Exemples 23, 26, et 27). Les valeurs spéciales de la fonction $\beta_k(s) = 2^{-s}\xi_k^*(s, \frac{1}{2})$ qui généralise la classique fonction bêta de Dirichlet (β_0 n'est autre que la fonction β) sont des *périodes* au sens de Kontsevich et Zagier ([KZ]).

Les sommes harmoniques et binomiales inverses qui interviennent dans le cadre de cette étude sont apparues pour la première fois dans la littérature scientifique en relation avec les diagrammes de Feynman ([DK]), mettant en évidence l'existence de profondes connexions entre certaines branches de la théorie des nombres et de la physique quantique ([Br], [Zh]).

4. Ces sommes binomiales inverses sont des cas particuliers de séries factorielles inverses considérées par Stirling dans son *Methodus Differentialis* (1730).

Chapitre I

Le produit harmonique dans l'espace des suites

Tous les résultats énoncés dans ce chapitre ont été démontrés dans [3]. On renvoie à cet article pour le détail des preuves.

1 Opérateurs dans l'espace des suites

On commence par introduire quelques opérateurs dans l'espace des suites à valeurs complexes qui jouent un rôle crucial dans la construction du produit harmonique, ainsi que leurs images respectives dans l'espace isomorphe des séries formelles.

Notation. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ des suites $a = (a(1), a(2), a(3), \ldots, a(n), \cdots)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{E}^*$.

Définition 1. Si $\mathbb{C}[[z]]$ désigne l'espace des séries formelles, on a un isomorphisme naturel :

$$\Phi : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]$$

défini par

$$\Phi(a)(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+1)\frac{z^n}{n!} = a(1) + a(2)z + a(3)\frac{z^2}{2} + a(4)\frac{z^3}{6} + \cdots$$

Exemple 1. a) La suite δ_m définie pour tout $m \geq 0$ et $n \geq 1$ par

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie la relation

$$\Phi(\delta_m)(z) = \frac{z^m}{m!}\,.$$

b) La suite $\mathbf{1} := (1, 1, 1, \ldots)$ vérifie $\Phi(\mathbf{1})(z) = e^z$.

c) La suite $N := (1, 2, 3, \ldots)$ vérifie $\Phi(N)(z) = (1+z)e^z$.

d) La suite géométrique de raison $\alpha \in \mathbb{C}$: $\alpha^{N-1} := (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots)$ vérifie la relation

$$\Phi(\alpha^{N-1})(z) = e^{\alpha z}.$$

e) On appelle *suite harmonique* et on note H_0 la suite $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ des inverses des entiers naturels. Elle vérifie la relation

$$\Phi(H_0)(z) = \frac{1}{z}\left(e^z - 1\right) .$$

Définition 2. Les opérateurs sur $\mathcal{E}^*$ se transforment en opérateurs sur $\mathbb{C}[[z]]$ via l'isomorphisme Φ. Plus précisément, si U désigne un opérateur sur $\mathcal{E}^*$, il lui correspond l'opérateur u sur $\mathbb{C}[[z]]$ défini par la relation

$$\Phi U = u\Phi \Leftrightarrow u = \Phi U \Phi^{-1}$$

que l'on appellera *l'image* de U. On a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^* & \xrightarrow{U} & \mathcal{E}^* \\ \Big\uparrow{\scriptstyle \Phi^{-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ \mathbb{C}[[z]] & \xrightarrow{u} & \mathbb{C}[[z]] \end{array}$$

L'image de l'opérateur I d'identité sur $\mathcal{E}^*$ sera notée Id.

1.1 Les opérateurs L et R

Définition 3. L'opérateur L de décalage à gauche (left) sur $\mathcal{E}^*$ est défini par

$$L(a)(n) = a(n+1),$$

c'est à dire :

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \overset{L}{\longmapsto} (a(2), a(3), a(4), \dots) .$$

L'image de L est l'opérateur de dérivation formelle ∂ :

$$\Phi(L(a))(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+2)\frac{z^n}{n!} = a(2) + a(3)z + a(4)\frac{z^2}{2!} + \cdots = \partial\Phi(a)(z).$$

Définition 4. L'opérateur R de décalage à droite (right) sur $\mathcal{E}^*$ est défini par

$$R(a)(n) = \begin{cases} a(n-1) & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

c'est à dire :

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \overset{R}{\longmapsto} (0, a(1), a(2), a(3), \dots) .$$

L'image de R est l'opérateur d'intégration formelle $\int$:

$$\Phi(R(a))(z) = \sum_{n\geq 0} a(n+1)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = a(1)z + a(2)\frac{z^2}{2!} + \cdots = \int_0^z \Phi(a)(t)\,dt.$$

Remarque 1. Les opérateurs L et R ne sont pas inverses l'un de l'autre. On a la relation $LR = I$, mais on notera que l'opérateur RL n'est pas l'identité :

$$(a(1), a(2), a(3), \dots) \overset{RL}{\longmapsto} (0, a(2), a(3), a(4), \dots) \,.$$

1.2 Les opérateurs D et S

Définition 5. Soit $V : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation défini par

$$V(a) = a(1).$$

L'image de V est l'application $v : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $v(\Phi(a)) = \Phi(a)(0)$.

L'opérateur de différence finie $D : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$D(a)(n) = V\left((I - L)^{n-1} a\right) = v\left((\mathrm{Id} - \partial)^{n-1} \Phi(a)\right) \,,$$

ce qui se traduit par

$$D(a)(n+1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} a(j+1) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On obtient ainsi pour de petites valeurs de n,

$$\begin{aligned} D(a)(1) &= a(1), \\ D(a)(2) &= a(1) - a(2), \\ D(a)(3) &= a(1) - 2a(2) + a(3), \text{ etc.} \end{aligned}$$

On a la relation :

$$\Phi(D(a))(z) = e^z \Phi(a)(-z) \,,$$

ce qui signifie que l'image d de l'opérateur D vérifie pour tout $f \in \mathbb{C}[[z]]$,

$$d(f)(z) = e^z f(-z) \,.$$

Théorème 1. *L'opérateur D est un automorphisme auto-inverse qui laisse la suite harmonique H_0 invariante ; autrement dit, pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a*

$$D(D(a)) = a$$

et

$$D(H_0) = H_0 \,.$$

Exemple 2. a) On a $D(\mathbf{1}) = \delta_0$ et $D(N) = \delta_0 - \delta_1$.

b) Si α^{N-1} est la suite géométrique de raison $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $D(\alpha^{N-1}) = (1-\alpha)^{N-1}$. En particulier la suite $(\frac{1}{2})^{N-1}$ est invariante par D.

Définition 6. L'opérateur de sommation $S : \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ est défini par

$$S(a)\,(n) = \sum_{j=1}^{n} a(j)\,.$$

L'opérateur S est un automorphisme d'inverse $I - R$. L'image de S est l'opérateur $s = \mathrm{Id} - d \int d$.

Exemple 3. 1) $S(\delta_0) = \mathbf{1}, S(\mathbf{1}) = N$.

2) $S(\alpha^{N-1}) = \dfrac{1}{1-\alpha}(\mathbf{1} - \alpha^N)$ pour $\alpha \neq 1$. En particulier,

$$S((-1)^{N-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + (-1)^{N-1}) = (1, 0, 1, 0, \dots)\,.$$

Théorème 2 (Relation entre les quatre opérateurs précédents)**.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} DL(a) &= (I - L)D(a), \\ DS(a) &= (I - R)D(a), \\ DR(a) &= (I - S)D(a)\,. \end{aligned}$$

Exemple 4. On rappelle que la suite harmonique H_0 est définie par $H_0(n) = \dfrac{1}{n}$. Pour tout entier $q \geq 0$, on considère la suite H_q des nombres hyperharmoniques d'ordre q définie par

$$H_q = S^q(H_0)\,,$$

ce qui se traduit récursivement par la relation

$$H_q(n) = \sum_{j=1}^{n} H_{q-1}(j) \quad \text{pour } q \geq 1.$$

En particulier, la suite H_1 des nombres hyperharmoniques d'ordre 1 est la suite des nombres harmoniques :

$$H_1(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,.$$

D'après la relation $DR = (I - S)D$ et l'invariance de la suite H_0 par D, on a

$$DR(H_0) = (I - S)(H_0) = H_0 - H_1\,,$$

ou, de manière équivalente,

$$D(H_1) = H_0 - R(H_0)\,.$$

D'une manière plus explicite :

$$D(H_1)(n) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

2 Le produit harmonique des suites

On construit à présent le produit harmonique dans l'espace des suites au moyen de l'opérateur D introduit précédemment.

2.1 L'algèbre $\mathcal{H} = (\mathcal{E}^*, \bowtie)$

Définition 7. Si a et b sont deux suites dans $\mathcal{E}^*$, on note ab la suite définie par

$$(ab)(n) = a(n)b(n)\,.$$

On a en particulier : $\mathbf{1}\,a = a$ et $\delta_m\,a = a(m+1)\delta_m$ pour tout $m \geq 0$. Muni de ce produit, appelé *produit de Hadamard* des suites, l'espace $\mathcal{E}^*$ est une algèbre commutative, associative et unitaire notée $\mathcal{A}$. L'élément unité de $\mathcal{A}$ est la suite $\mathbf{1}$.

Définition 8. On définit le *produit harmonique* $a \bowtie b$ de deux suites a et b dans $\mathcal{E}^*$ par

$$a \bowtie b := D(D(a)D(b))\,.$$

Comme $D = D^{-1}$, on déduit immédiatement de la définition précédente les deux relations fondamentales suivantes :

$$D(a \bowtie b) = D(a)D(b)\,,$$

et

$$D(ab) = D(a) \bowtie D(b)\,.$$

Exemple 5. 1) $\mathbf{1} \bowtie a = a(1)\mathbf{1}$, car

$$D(\mathbf{1} \bowtie a) = D(\mathbf{1})D(a) = \delta_0 D(a) = D(a)(1)\delta_0 = a(1)\delta_0 = a(1)D(\mathbf{1}).$$

2) $N \bowtie a = a(2)\mathbf{1} + (a(1) - a(2))N$, car

$$\begin{aligned} D(N)D(a) &= (\delta_0 - \delta_1)D(a) \\ &= D(a)(1)\delta_0 - D(a)(2)\delta_1 \\ &= a(1)D(N) + a(2)D(1 - N). \end{aligned}$$

3) $\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1} = (\alpha+\beta-\alpha\beta)^{N-1}$, car

$$\begin{aligned} D(\alpha^{N-1} \bowtie \beta^{N-1}) &= (1-\alpha)^{N-1}(1-\beta)^{N-1} \\ &= (1-(\alpha+\beta-\alpha\beta))^{N-1} \\ &= D((\alpha+\beta-\alpha\beta)^{N-1})\,. \end{aligned}$$

Théorème 3. *L'espace $(\mathcal{E}^*, \bowtie)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative, associative et unitaire notée $\mathcal{H}$, isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}$. L'élément unité dans $\mathcal{H}$ est la suite δ_0.*

Corollaire 1. Une suite a est inversible dans $\mathcal{H}$ si et seulement si la suite $D(a)$ est inversible dans $\mathcal{A}$ (i.e. $D(a)(n) \neq 0$ pour tout n). Dans ce cas, l'inverse harmonique de a est donné par la formule

$$a^{\bowtie(-1)} = D\left(\frac{1}{D(a)}\right)\,.$$

Exemple 6. a)

$$(H_0)^{\bowtie(-1)} = D(N) = \delta_0 - \delta_1\,,$$

b)

$$\left(\alpha^{N-1}\right)^{\bowtie(-1)} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{N-1}\,.$$

Remarque 2. On notera que l'algèbre $\mathcal{H}$ contient des diviseurs de zéro. On a par exemple

$$\mathbf{1} \bowtie \delta_1 = 0\,.$$

On rappelle que la suite géométrique de raison $1/2$ est invariante par D. Elle peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie \delta_0\,.$$

Plus généralement, on donne la caractérisation suivante qui est une reformulation algébrique du critère de Sun ([Su]).

Théorème 4 (Caractérisation des suites invariantes par D)**.** *Une suite $a \in \mathcal{E}^*$ est invariante par D si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme*

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} \bowtie b$$

où la suite $b \in \mathcal{E}^*$ est telle que $b(2k) = 0$ pour tout $k \geq 1$.

Exemple 7. a) La suite harmonique H_0 est invariante par D. Elle peut s'écrire

$$H_0 = (\frac{1}{2})^{N-1} \bowtie b$$

avec $b = H_0 \bowtie (-1)^{N-1} = (1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots)$.

b) La suite

$$a = \frac{1}{2}(\delta_0 + \mathbf{1}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots)$$

est invariante par D. Elle peut s'écrire

$$a = (\frac{1}{2})^{N-1} \bowtie (1, 0, 1, 0, \cdots)\,.$$

2.2 Expression explicite du produit harmonique

Le produit harmonique admet l'expression explicite suivante :

Théorème 5. *Pour toutes suites a et $b \in \mathcal{E}^*$ et tout entier $n \geq 0$,*

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} C_n^{i,j}\, a(i+1) b(j+1)$$

où les nombres $C_n^{i,j}$ sont définis par l'identité

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} C_n^{i,j}\, X^i Y^j\,.$$

Remarque 3. En développant $(X + Y - XY)^n$ par la formule du binôme et en identifiant le coefficient de $X^i Y^j$, ceci peut encore s'écrire

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} (-1)^{k-j} \binom{n}{k} \binom{k}{j} a(k+1) b(n+1-j) \quad (n \geq 0)\,.$$

Exemple 8. Pour de petites valeurs de n, on obtient ainsi

$$(a \bowtie b)(1) = a(1)b(1),$$
$$(a \bowtie b)(2) = a(2)b(1) + a(1)b(2) - a(2)b(2),$$
$$(a \bowtie b)(3) = a(3)b(1) + a(1)b(3) + 2a(2)b(2) - 2a(3)b(2) - 2a(2)b(3) + a(3)b(3),$$

etc.

2.3 Puissances harmoniques k-ièmes

Définition 9. Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier $k \geq 0$, la *puissance harmonique k-ième* de a notée $a^{\bowtie k}$ par

$$a^{\bowtie 0} = \delta_0 \quad \text{et } a^{\bowtie (k+1)} = a^{\bowtie k} \bowtie a\,.$$

Par récurrence sur k, on en déduit immédiatement la formule suivante :

$$a^{\bowtie k} = D(\underbrace{D(a)\ldots D(a)}_{k}) = D\left((D(a))^k\right)\,.$$

En particulier, si a est une suite invariante par D, alors on a

$$a^{\bowtie k} = D(a^k)\,.$$

Exemple 9. a)

$$N^{\bowtie k} = D((\delta_0 - \delta_1)^k) = \mathbf{1} + (-1)^k(1-N) = \begin{cases} N & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2-N & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

b)

$$(\delta_1)^{\bowtie k} = \sum_{m=0}^{k} m! S_2(k,m)\delta_m\,,$$

où les $S_2(k,m)$ sont les nombres de Stirling de deuxième espèce définis par

$$S_2(k,m) = \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}j^k.$$

c)

$$D(N^k) = (D(N))^{\bowtie k} = (\delta_0 - \delta_1)^{\bowtie k} = \sum_{0 \leq j \leq i \leq k} (-1)^i \binom{k}{i} j! S_2(i,j)\delta_j\,.$$

2.4 Propriété d'harmonicité

Notation. Pour p entier naturel, on pose $(N)_0 = \mathbf{1}$, et pour $p \geq 1$

$$(N)_p = N(N+1)\cdots(N+p-1)\,.$$

Théorème 6 (Propriété d'harmonicité)**.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$ et tout entier $p \geq 0$, on a la relation*

$$\frac{p!}{(N)_{p+1}} \bowtie a = \frac{p!}{(N)_{p+1}} S\left(\frac{(N)_p}{p!}\,a\right)\,,$$

En particulier, pour $p = 0$, on en déduit l'important corollaire :

$$H_0 \bowtie a = H_0 S(a)\,.$$

Exemple 10.

$$H_0 \bowtie H_0 = H_0 S(H_0) = H_0 H_1 = D\left((H_0)^2\right) ,$$
$$(H_0)^{\bowtie 3} = H_0 \bowtie (H_0 \bowtie H_0) = H_0 S(H_0 H_1) = D\left((H_0)^3\right) .$$

Exemple 11. On a

$$\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a = \frac{1}{N(N+1)} S(Na)$$

c'est à dire

$$(\frac{1}{N(N+1)} \bowtie a)(n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k a(k) \quad (n \geq 1).$$

2.5 Les sommes harmoniques

On rappelle la remarquable propriété de la suite harmonique H_0 vis-à-vis du produit harmonique énoncée au paragraphe précédent :

$$H_0 \bowtie a = H_0 S(a) ,$$

ce qui peut se traduire par $D\left(H_0 D(a)\right) = H_0 S(a)$ pour toute suite a.

Plus généralement, on introduit à présent une notion de *somme harmonique* de la manière suivante :

Définition 10. Soit une suite $a \in \mathcal{E}^*$, on définit pour tout entier naturel k, la *somme harmonique k-ième* de a notée $S^{(k)}(a)$ par la formule

$$(H_0)^{\bowtie k} \bowtie a = H_0 S^{(k)}(a) .$$

Théorème 7. *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, on a $S^{(1)}(a) = S(a)$ et la relation de récurrence :*

$$S^{(k+1)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} S^{(k)}(a)(m) \quad \textit{pour } k \geq 1.$$

Il en résulte que pour $k \geq 1$,

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}} a(n_k) .$$

Exemple 12. Dans le cas où a est la suite harmonique H_0, les nombres $S^{(k)}(a)(n)$ ne sont autres que les nombres harmoniques de Rota ([Ro]).

$$S^{(k)}(H_0)(n) = \sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_k} .$$

Pour les petites valeurs de k, on a ainsi :

$$S^{(0)}(H_0)(n) = 1\,,$$
$$S^{(1)}(H_0)(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_1(n)\,,$$
$$S^{(2)}(H_0)(n) = 1 + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) = \sum_{m=1}^{n} \frac{H_1(m)}{m}\,.$$

Théorème 8 (Formule de Dilcher étendue)**.** *Pour toute suite $a \in \mathcal{E}^*$, et pour $k \geq 1$, on a l'identité*

$$S^{(k)}(a)(n) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^{k-1}} D(a)(m)\,.$$

Il en résulte que, pour tout entier naturel r,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}\, n_k^{r+1}} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} S^{(r)}(H_0)(m).$$

Exemple 13. a) Pour $r = 0$, on retrouve la forme classique de la formule de Dilcher ([D]) :

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_k} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k}\,.$$

b) Pour $r = 1$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1} n_k^2} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} H_1(m)\,.$$

c) Pour $r = 2$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1} n_k^3} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} \sum_{j=1}^{m} \frac{H_1(j)}{j}\,.$$

d) Enfin, pour $r = 3$,

$$\sum_{n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1} n_k^4} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \frac{1}{m^k} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} \frac{H_1(i)}{i}\,.$$

Chapitre II

La sommation de Ramanujan

Tous les résultats énoncés dans ce chapitre ont été démontrés dans [1], [4], et [9]. On renvoie à ces articles pour le détail des preuves.

3 L'opérateur D dans l'espace des fonctions

On commence par introduire un cadre analytique qui permet d'étendre les opérateurs de différence finie D et de sommation S définis au chapitre I.

3.1 Transformation de Laplace-Borel

Définition 11. On considère l'espace vectoriel E des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$ à valeurs complexes vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que $|f(t)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon t}$ pour tout $t \in \,]0,+\infty[$.

Définition 12. Soit f une fonction dans l'espace E. La *transformée de Laplace* $\mathcal{L}(f)$ de f est définie par

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt \quad \text{pour } \Re(x) > 0\,.$$

Notation. Dans la suite, on note $\mathcal{E} = \mathcal{L}(E)$ l'image de E par $\mathcal{L}$.

Théorème 9. *Si a est une fonction dans $\mathcal{E}$, alors elle vérifie les propriétés suivantes :*

a) a est une fonction analytique dans le demi-plan $\{\, \Re(x) > 0 \,\}$,

b) $a(x) \to 0$ quand $\Re(x) \to +\infty$,

c) $\mathcal{L} : E \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme.

Définition 13. Soit $a \in \mathcal{E}$. La *transformée de Borel* de a est l'unique fonction $\widehat{a} \in E$ telle que $a = \mathcal{L}(\widehat{a})$. On a les formules réciproques :

$$\widehat{a}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{zt} a(z)\, dz \quad \text{pour } c > 0 \text{ et } t > 0\,,$$

et

$$a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \widehat{a}(t)\, dt \qquad \text{pour } \Re(x) > 0\,.$$

Définition 14. Soient f et g deux fonctions dans E. Le *produit de convolution* $f * g$ de f et g est la fonction définie pour tout $t > 0$ par

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du\,.$$

Théorème 10. *Pour tout $f \in E$ et $g \in E$, alors $f * g \in E$ et*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g)\,.$$

Il en résulte que si $a \in \mathcal{E}$ et $b \in \mathcal{E}$ alors le produit $ab \in \mathcal{E}$ car $ab = \mathcal{L}(\widehat{a} * \widehat{b})$.

3.2 L'opérateur D et le difféomorphisme Λ

Définition 15. Soit a une fonction de $\mathcal{E}$ alors l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{x-1}\widehat{a}(t)dt$$

converge pour tout x vérifiant $\Re(x) > 0$. On appelle $D(a)$ la fonction définie pour tout x tel que $\Re(x) > 0$ par

$$D(a)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{x-1}\widehat{a}(t)dt\,.$$

Remarque 4.

Les valeurs de $D(a)$ sur les entiers positifs peuvent être calculées directement sans recourir à $\widehat{a}$. Le développement de $(1-e^{-t})^n$ par la formule du binôme conduit à l'expression :

$$D(a)(n+1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} a(j+1) \quad \text{pour tout entier } n \geq 0.$$

Autrement dit, l'opérateur D dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étend l'opérateur D défini au Chapitre I dans l'espace $\mathcal{E}^*$ des suites.

Notation. On appelle Λ le C^1-diffeomorphisme de $\mathbb{R}_+$ défini par

$$\Lambda(u) = -\ln(1-e^{-u}).$$

En particulier, il est important de noter que Λ est involutif :

$$\Lambda^{-1} = \Lambda\,.$$

Théorème 11. *Soit a une fonction dans $\mathcal{E}$. Alors la fonction $D(a) \in \mathcal{E}$ et, de plus, verifie la relation*

$$\widehat{D(a)} = \widehat{a}(\Lambda)\,,$$

où $\widehat{a}(\Lambda)$ désigne $\widehat{a} \circ \Lambda$.

Exemple 14. Soit $a(x) = \dfrac{1}{x^s}$ avec $\Re(s) \geq 1$. Alors $\widehat{a}(t) = \dfrac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$. Il en résulte, par le changement de variable $t = \Lambda(u)$, que

$$D(\frac{1}{x^s}) = \mathcal{L}\left(\frac{\Lambda^{s-1}}{\Gamma(s)}\right)\,,$$

Remarque 5. Le Théorème 11 peut être visualisé par le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{D} & \mathcal{E} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{L}^{-1}} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \mathcal{L}} \\ E & \xrightarrow{\Lambda^\star} & E \end{array}$$

où $\Lambda^\star(\widehat{a}) = \widehat{a}(\Lambda)$. Les propriétés algébriques de D sont résumées dans le théorème suivant qui est l'analogue continu du Théorème 1.

Théorème 12. *L'opérateur D est un automorphisme de $\mathcal{E}$ qui verifie $D = D^{-1}$ et laisse invariante la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.*

3.3 Sommation de Ramanujan

Définition 16. La suite des nombres de Bernoulli de seconde espèce (b_n) ([J], [Y1]), encore appelés *coefficients de Gregory* [5] ([Bl]), est définie par la fonction génératrice

$$\frac{z}{\ln(1+z)} = \sum_{n\geq 0} b_n z^n\,.$$

Exemple 15. Les b_n sont des nombres rationnels qui peuvent se calculer au moyen de la relation de récurrence

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k b_k}{n-k} = 0 \qquad \text{pour } n \geq 2.$$

5. Cette famille de nombres apparaît en effet pour la première fois dans une lettre de James Gregory datant de 1670.

Une représentation intégrale des nombres b_n est donnée par

$$n!b_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)\,dx \quad \text{pour } n \geq 1.$$

On a ainsi pour les petites valeurs de n,

$$b_1 = \frac{1}{2},\ b_2 = -\frac{1}{12},\ b_3 = \frac{1}{24},\ b_4 = -\frac{19}{720},\ b_5 = \frac{3}{160},\ \text{etc.}$$

On notera que $|b_n| = (-1)^{n-1}b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Théorème 13. *Soit a une fonction dans $\mathcal{E}$. La serie*

$$\sum_{n\geq 1} |b_n| \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\widehat{a}(t)\,dt$$

converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}\widehat{a}(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t})\,\widehat{a}(t)\,dt\,.$$

Remarque 6. Si $a \in \mathcal{E}$, alors la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ peut s'écrire

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = \sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-nt}\,\widehat{a}(t)\,dt\,,$$

et une permutation formelle de $\sum_{n\geq 1}$ et $\int_0^{+\infty}$ conduirait à écrire

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,\widehat{a}(t)\,dt.$$

Cependant, cette dernière intégrale peut diverger en 0. On peut la renormaliser en retirant la singularité en 0 et ceci peut être fait simplement en soustrayant la partie polaire $\frac{1}{t}$ de $\frac{1}{1-e^{-t}}$. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 17. Soit a une fonction dans $\mathcal{E} = \mathcal{L}(E)$. La *somme de Ramanujan* de la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ est définie par

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t})\,\widehat{a}(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| D(a)\,(n)\,.$$

Exemple 16. Soit $a(x) = \dfrac{1}{x^s}$ avec $\Re(s) > 1$. Alors, $a \in \mathcal{E}$ et $\widehat{a}(t) = \dfrac{t^{s-1}}{\Gamma(s)}$. Par conséquent

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

où $\zeta(s)$ est la valeur en s de la fonction zêta de Riemann.

Remarque 7. a) La définition de la somme de Ramanujan donnée dans ce chapitre coïncide avec celle donnée dans un cadre plus général dans [10] et [Ca] ; elle possède donc les mêmes propriétés fondamentales. En particulier, il résulte de la définition que l'application $a \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)$ est linéaire.

b) Soit m un entier positif et $a \in \mathcal{E}$. La somme de Ramanujan de la série translatée $\sum_{n\geq 1} a(n+m)$ s'exprime par la formule :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+m) = \int_0^{+\infty} e^{-t}e^{-mt}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)\widehat{a}(t)dt\,.$$

Cette somme ne vérifie cependant pas la propriété de décalage usuelle :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+m) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{j=1}^{m} a(j)$$

mais seulement la relation inhabituelle :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n+m) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{j=1}^{m} a(j) + \int_1^{m+1} a(x)\,dx$$

Dans le Chapitre V de [Ca] est développé un formalisme algébrique adéquat qui explique pourquoi cette relation est "naturelle".

c) La formule

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}| D(a)\,(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}| \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} a(j+1)$$

est vraie dans un cadre plus général (cf. [Ca], Théorème 15).

Exemple 17 (Constantes de Stieltjes)**.** Les constantes de Stieltjes γ_k sont définies par le développement en série de Laurent de ζ :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\gamma_k (s-1)^k \quad (s \neq 1)\,.$$

Ces constantes peuvent se représenter comme des sommes de Ramanujan (cf. [9]), plus précisément, on a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln^k(n)}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}| \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\ln^k(j+1)}{j+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|b_{n+1}|}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \ln^k(j+1) \quad \text{(par la propriété d'harmonicité)}\,.\end{aligned}$$

En particulier, la première constante de Stieltjes γ_1 peut s'écrire

$$\gamma_1 = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n} = \frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{|b_n|}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|b_{n-k+1}b_k|}{n-k+1}\left(H_1(n) - H_1(k)\right)\right]\,.$$

4 Le produit harmonique des fonctions

On donne à présent une construction du produit harmonique dans ce cadre analytique au moyen du produit de convolution.

4.1 Le Λ-produit de convolution

Définition 18. Si a et b sont deux fonctions dans $\mathcal{E}$, alors le Λ-*produit de convolution* $\widehat{a} \circledast \widehat{b}$ de $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ est défini par

$$\widehat{a} \circledast \widehat{b} = \Lambda^\star(\Lambda^\star(\widehat{a}) * \Lambda^\star(\widehat{b}))\,,$$

ou de manière équivalente (puisque $\Lambda^\star = (\Lambda^\star)^{-1}$) par

$$(\widehat{a} \circledast \widehat{b})(\Lambda) = \widehat{a}(\Lambda) * \widehat{b}(\Lambda)\,.$$

Le Λ-produit de convolution hérite des propriétés algébriques du produit de convolution ordinaire : il est bilinéaire, commutatif et associatif.

Définition 19. Soient a et b deux fonctions dans $\mathcal{E}$. Le *produit harmonique* $a \bowtie b$ de a et b est défini par

$$a \bowtie b = \mathcal{L}(\widehat{a} \circledast \widehat{b}) \in \mathcal{E}\,.$$

Cette construction peut être synthétisée dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
(a,b) & \longrightarrow & (\widehat{a},\widehat{b}) & \longrightarrow & (\widehat{a}(\Lambda),\widehat{b}(\Lambda)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
a \bowtie b & \longleftarrow & \widehat{a} \circledast \widehat{b} & \longleftarrow & \widehat{a}(\Lambda) * \widehat{b}(\Lambda)
\end{array}$$

Le produit harmonique dans $\mathcal{E}$ hérite des propriétés de bilinéarité, de commutativité et d'associativité du Λ-produit de convolution.

Théorème 14. *Si a et b sont deux fonctions dans $\mathcal{E}$ alors on a les relations fondamentales*

$$D(a \bowtie b) = D(a)\,D(b)\,,$$

et

$$D(ab) = D(a) \bowtie D(b)\,.$$

Du point de vue de la sommation de Ramanujan, les deux relations précédentes s'interprètent de la façon suivante :

Corollaire 2. Soient a et b dans $\mathcal{E}$, on a les identités :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} (a \bowtie b)(n) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| D(a)(n)\, D(b)(n)\,.$$

et

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} (ab)(n) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| (D(a) \bowtie D(b))(n)\,.$$

Remarque 8. Les valeurs du produit $a \bowtie b$ sur les entiers positifs peuvent être évaluées sans recourir à $\widehat{a}$ ni à $\widehat{b}$. Par des transformations élémentaires, on peut en effet montrer que

$$(a \bowtie b)(n+1) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-t-s})(e^{-t} + e^{-s} - e^{-t}e^{-s})^n \widehat{a}(t)\widehat{b}(s)dtds\,.$$

Par conséquent, si les nombres $C_n^{i,j}$ sont définis par

$$(X + Y - XY)^n = \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} C_n^{i,j}\, X^i Y^j\,,$$

on a l'expression explicite

$$(a \bowtie b)(n+1) = \sum_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq n}} C_n^{i,j}\, a(i+1)b(j+1)\,,$$

Autrement dit, le produit harmonique dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions étend naturellement le produit harmonique défini au Chapitre I dans l'espace $\mathcal{E}^*$ des suites.

4.2 Propriété d'harmonicité

On énonce à présent une propriété d'harmonicité dans l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions analogue à celle déjà vue dans l'espace des suites (cf. Théorème 6).

Théorème 15. *Soit $a \in \mathcal{E}$. Alors*

$$\frac{1}{x} \bowtie a = \frac{S(a)(x)}{x}\,,$$

où $S(a)$ désigne la fonction définie pour $\Re(x) > 0$ par

$$S(a)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} (1 - e^{-xt})\widehat{a}(t)dt\,.$$

Remarque 9. L'opérateur S étend l'opérateur de sommation introduit au Chapitre I. Pour tout entier $n \geq 1$, on a en effet

$$S(a)(n) = \sum_{j=1}^{n} a(j)\,.$$

Exemple 18.

$$\frac{1}{x} \bowtie \frac{1}{x} = \mathcal{L}(\Lambda) = \frac{\psi(x+1)+\gamma}{x},$$

où ψ désigne la fonction digamma (dérivée logarithmique de la fonction Γ).

4.3 La fonction zêta modifiée

Définition 20. Pour tout entier $k \geq 1$, on considère la puissance harmonique k-ième de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ notée (abusivement) $\frac{1}{x}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\bowtie k} = \underbrace{\frac{1}{x} \bowtie \frac{1}{x} \bowtie \ldots \bowtie \frac{1}{x}}_{k} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)\,,$$

Pour tout entier $k \geq 0$ et $\Re(s) \geq 1$, on définit la *fonction zêta modifiée* d'ordre k par la formule suivante :

$$F_k(s) := \begin{cases} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^s} & \text{si } k = 0, \\ \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\bowtie k} \bowtie \frac{1}{x^s}\right)(n) & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Théorème 16. *Pour tout entier $k \geq 0$,*

$$F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^k} D\left(\frac{1}{x^s}\right)(n)$$

où $\frac{1}{x^s}$ désigne la fonction $x \mapsto x^{-s}$. En particulier,

$$F_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| D\left(\frac{1}{x^s}\right)(n) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}\,.$$

Théorème 17. *La fonction F_k se prolonge analytiquement dans $\mathbb{C}$ en une fonction entière. Les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta modifiée sont données par :*

$$F_k(-n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{|b_{m+1}|}{(m+1)^k} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (j+1)^n\,. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

En particulier, pour $k=0$, on déduit la relation

$$\frac{1-B_{n+1}}{n+1}=\sum_{m=0}^{n}|b_{m+1}|\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(j+1)^n$$

où les B_n sont les nombres de Bernoulli ([AIK]).

Définition 21 (Polynômes de Bell modifiés)**.** La suite des polynômes de Bell modifiés (P_n) est définie par la fonction génératrice

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_k\frac{z^k}{k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x_1,\cdots,x_n)\,z^n$$

ou par la relation de récurrence équivalente :

$$P_0=1,\quad nP_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}x_j\,P_{n-j}(x_1,\dots,x_{n-j})\quad(n\geq 1)\,,$$

ou bien encore par la représentation explicite :

$$P_n(x_1,...,x_n)=\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}\frac{1}{k_1!k_2!\dots k_n!}\left(\frac{x_1}{1}\right)^{k_1}\left(\frac{x_2}{2}\right)^{k_2}\dots\left(\frac{x_n}{n}\right)^{k_n}$$

Pour de petites valeurs de n, on obtient ainsi les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
&P_0=1\,,\\
&P_1(x_1)=x_1\,,\\
&P_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2\,,\\
&P_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{6}x_1^3+\frac{1}{2}x_1x_2+\frac{1}{3}x_3\,,\\
&P_4(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{24}x_1^4+\frac{1}{4}x_1^2x_2+\frac{1}{8}x_2^2+\frac{1}{3}x_1x_3+\frac{1}{4}x_4\,.
\end{aligned}$$

Théorème 18 (valeurs spéciales de F_k sur les entiers positifs)**.** *Pour tout entier $m\geq 0$, on a*

$$D\left(\frac{1}{x^{m+1}}\right)(n)=\frac{P_m(H_n^{(1)},H_n^{(2)},\dots,H_n^{(m)})}{n}$$

d'où il résulte que

$$F_k(m+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n^{k+1}}P_m(H_n^{(1)},H_n^{(2)},\dots,H_n^{(m)})\,,$$

où b_n désigne le n-ième nombre de Bernoulli de seconde espèce, P_m le m-ième polynôme de Bell modifié et $H_n^{(m)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^m}$.

Remarque 10. Avec les notations du Chapitre I, on a l'identité $H_n^{(1)} = H_1(n)$.

Dans le cas où $k = 0$, on obtient une reformulation de la formule d'Hermite :

Corollaire 3 (formule d'Hermite revisitée)**.** Pour $m \geq 1$,

$$F_0(m+1) = \zeta(m+1) - \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} P_m(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(m)}) \,,$$

Corollaire 4 (formule de dualité)**.** Pour tout entier $k \geq 0$,

$$F_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{k+1}} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{P_k(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \dots, H_n^{(k)})}{n} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{n \geq n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1 \dots n_k} \,.$$

Exemple 19.

$$F_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} = \gamma \,,$$
$$F_0(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n| H_n^{(1)}}{n} = \zeta(2) - 1 \,,$$
$$F_0(3) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n| (H_n^{(1)})^2}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n| H_n^{(2)}}{n} = \zeta(3) - \frac{1}{2} \,,$$
$$F_1(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^2} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(1)}}{n} \,,$$
$$F_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^3} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{H_m^{(1)}}{m} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{(H_n^{(1)})^2}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n^{(2)}}{n} \,.$$

Les valeurs spéciales de la fonction F_1 sur les entiers positifs admettent une expression particulière :

Théorème 19. *Pour tout entier $q \geq 2$,*

$$F_1(q) = \gamma\zeta(q) + \zeta(q+1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}}{n^q} - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k n^{q-k}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^q} \,.$$

Exemple 20.

$$F_1(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n| H_n^{(1)}}{n^2} = \gamma\frac{\pi^2}{6} - \zeta(3) - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^2} \,,$$
$$F_1(3) = \gamma\zeta(3) - \frac{\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^3} \,,$$
$$F_1(4) = \gamma\frac{\pi^4}{90} - 2\zeta(5) + \frac{\pi^2}{6}\zeta(3) - \frac{2}{3}\zeta(3) + \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^4} \,.$$

5 Somme de Ramanujan des nombres hyperharmoniques

5.1 Nombres hyperharmoniques

Définition 22. On rappelle que H_0 désigne la suite définie par $H_0(n) = \frac{1}{n}$. Pour tout entier $q \geq 0$, on considère la suite H_q des *nombres hyperharmoniques* d'ordre q ([CG], [DB]) définie par

$$H_q = S^q(H_0)$$

où S est l'opérateur de sommation défini au chapitre I. Ceci se traduit par la relation de récurrence :

$$H_q(n) = \sum_{j=1}^{n} H_{q-1}(j)\,.$$

Les nombres hyperharmoniques d'ordre 1 sont simplement les nombres harmoniques

$$H_1(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}\,,$$

et pour $q \geq 2$,

$$H_q(n) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(H_1(n+q-1) - H_1(q-1)\right)\,.$$

En particulier,

$$H_2(n) = \sum_{j=1}^{n} H_1(j) = (n+1)H_1(n) - n\,.$$

5.2 Séries de Mascheroni décalées à droite

Définition 23. Si r désigne entier naturel, on considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|b_n|}{n}$ décalée r fois à droite, c'est à dire la série

$$\sigma_r := \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n-r}\,.$$

Théorème 20. *Pour tout entier naturel r, les sommes σ_r admettent l'expression suivante :*

$$\sigma_0 = \gamma\,, \quad \sigma_1 = -\zeta'(0) - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\ln(2\pi) - \gamma - 1\right)\,,$$

et pour $r \geq 2$,

$$\sigma_r = -\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{r-1} S_1(r-1,k)\zeta'(-k) + (-1)^r b_r \gamma + t_r$$

avec

$$t_r = -\frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{r} S_1(r-1,k-1)\frac{B_k}{k^2}\,,$$

où les $S_1(n,k)$ *sont les nombres de Stirling de première espèce (sans signe) définis comme les coefficients de la factorielle ascendante*

$$(x)_n := x(x+1)\ldots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} S_1(n,k)x^k \quad \textit{et } S_1(n,k) = 0 \textit{ pour } n < k.$$

Inversement, la formule pour σ_r *précédente admet la formule duale :*

$$\zeta'(-k) = \sum_{r=2}^{k+1}(-1)^{k-r}(r-1)!S_2(k,r-1)\sigma_r - \frac{B_{k+1}}{k+1}\gamma - \frac{B_{k+1}}{(k+1)^2} \quad \textit{pour } k \geq 1\,,$$

où les $S_2(k,m)$ *sont les nombres de Stirling de deuxième espèce.*

Exemple 21.

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= -\zeta'(-1) - \frac{1}{12}\gamma - \frac{1}{24}\,,\\
\sigma_3 &= -\frac{1}{2}\zeta'(-1) - \frac{1}{2}\zeta'(-2) - \frac{1}{24}\gamma - \frac{1}{48}\,,\\
\sigma_4 &= -\frac{1}{3}\zeta'(-1) - \frac{1}{2}\zeta'(-2) - \frac{1}{6}\zeta'(-3) - \frac{19}{720}\gamma - \frac{13}{960}\,,\\
\sigma_5 &= -\frac{1}{4}\zeta'(-1) - \frac{11}{24}\zeta'(-2) - \frac{1}{4}\zeta'(-3) - \frac{1}{24}\zeta'(-4) - \frac{3}{160}\gamma - \frac{19}{1920}\,.
\end{aligned}$$

Et inversement,

$$\begin{aligned}
\zeta'(-1) &= -\sigma_2 - \frac{1}{12}\gamma - \frac{1}{24}\,,\\
\zeta'(-2) &= \sigma_2 - 2\sigma_3\,,\\
\zeta'(-3) &= -\sigma_2 + 6\sigma_3 - 6\sigma_4 + \frac{1}{120}\gamma + \frac{1}{480}\,,\\
\zeta'(-4) &= \sigma_2 - 14\sigma_3 + 36\sigma_4 - 24\sigma_5\,.
\end{aligned}$$

L'évaluation des sommes σ_r permet d'exprimer la somme de Ramanujan de la série des nombres hyperharmoniques d'ordre q comme une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire de $\{1,\gamma,\ln(2\pi)\} \cup \{\zeta'(-k)\}_{k=1}^{q-1}$. Plus précisément, on a la formule suivante.

Corollaire 5.

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_q(n) &= \sum_{r=0}^{q}(-1)^r\binom{q}{r}\sigma_r \\ &= -\frac{q}{2}\ln(2\pi)+\gamma\left[\sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}b_r\right]+\frac{q}{2} \\ &- \sum_{1\leq k<r\leq q}(-1)^r\binom{q}{r}\frac{1}{(r-1)!}S_1(r-1,k)\zeta'(-k) \\ &- \sum_{2\leq k\leq r\leq q}(-1)^r\binom{q}{r}\frac{1}{(r-1)!}S_1(r-1,k-1)\frac{B_k}{k^2}\,.\end{aligned}$$

Exemple 22.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_1(n) = \sigma_0-\sigma_1 = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\frac{3}{2}\gamma+\frac{1}{2}\,,$$
$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_2(n) = -\ln(2\pi)+\frac{23}{12}\gamma-\zeta'(-1)+\frac{23}{24}\,,$$
$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_3(n) = -\frac{3}{2}\ln(2\pi)+\frac{55}{24}\gamma-\frac{5}{2}\zeta'(-1)+\frac{1}{2}\zeta'(-2)+\frac{67}{48}\,,$$
$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_4(n) = -2\ln(2\pi)+\frac{1901}{720}\gamma-\frac{13}{3}\zeta'(-1)+\frac{3}{2}\zeta'(-2)-\frac{1}{6}\zeta'(-3)+\frac{1747}{960}\,.$$

Remarque 11. L'introduction des polynômes de Bernoulli de deuxième espèce $b_n(x)$ qui sont définis par la fonction génératrice

$$\frac{z}{\ln(1+z)}(1+z)^x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)z^n$$

permet d'exprimer plus simplement le coefficient de γ dans l'expression précédente de la somme de Ramanujan de la série des nombres hyperharmoniques d'ordre q. On a

$$\text{coefficient de } \gamma \ = \sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}b_r = b_q(q)\,.$$

Chapitre III

La fonction zêta d'Arakawa-Kaneko

Tous les résultats énoncés dans ce chapitre ont été démontrés dans [2] et [5]. On renvoie à ces deux articles pour le détail des preuves. On commence par introduire la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko généralisée $\xi_k(s,x)$ puis sa variante alternée $\xi_k^*(s,x)$. On s'intéresse tout particulièrement à leurs valeurs spéciales sur les entiers qui sont des *périodes* au sens de Kontsevich et Zagier ([KZ]).

Définition 24. Pour tout entier $k \geq 1$, la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko $\xi_k(s,x)$ est définie pour $\Re(s) > 0$ et $\Re(x) > 0$ par la transformée de Mellin normalisée

$$\xi_k(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}\, t^{s-1}\, dt$$

avec

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}\,.$$

En particulier, comme $\mathrm{Li}_1(1-e^{-t}) = t$, on notera que $\xi_1(s,x)$ n'est autre que $s\zeta(s+1,x)$ où $\zeta(s,x)$ est la fonction zêta d'Hurwitz. Dans la suite, on s'intéresse tout particulièrement aux valeurs $x=1$ et $x=1/2$. Pour cela, on pose

$$\xi_k(s) := \xi_k(s,1) \quad \text{et} \quad \alpha_k(s) := 2^{-s}\xi_k(s,\frac{1}{2})\,.$$

Pour $k=1$, il existe une relation simple entre les valeurs des fonctions ζ, ξ_k et α_k :

$$\xi_1(s) = s\,\zeta(s+1) \quad \text{et} \quad \alpha_1(s) = 2^{-s}s\zeta(s+1,\frac{1}{2}) = (2-2^{-s})s\zeta(s+1)\,.$$

Remarque 12 (Lien avec la fonction zêta modifiée)**.** Pour $\Re(s) \geq 1$, on peut donner au moyen de l'opérateur D et du produit harmonique une définition plus algébrique de la fonction ξ_k d'Arakawa-Kaneko comme suit :

$$\begin{aligned}\xi_k(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} D\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\bowtie k} \bowtie \frac{1}{x^s}\right)(n)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} D\left(\frac{1}{x^s}\right)(n)\end{aligned}$$

où $\dfrac{1}{x^s}$ désigne la fonction $x \mapsto x^{-s}$. En particulier, on remarque l'analogie formelle avec l'expression de la fonction F_k vue au chapitre II (cf. Théorème 16) :

$$F_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^k} D\left(\frac{1}{x^s}\right)(n)\,.$$

6 Valeurs spéciales de la fonction ξ_k

6.1 Valeurs sur les entier positifs

Théorème 21 (valeurs aux entiers positifs)**.** *Pour tout entier $m \geq 0$ et $\Re(x) > 0$,*

$$\xi_k(m+1,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^k x(x+1)\dots(x+n)} P_m(h_n^{(1)}(x),\dots,h_n^{(m)}(x))$$

où $P_m(x_1,\dots,x_m)$ désigne le m-ième polynôme de Bell modifié évalué sur les nombres harmoniques généralisés

$$h_n^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(j+x)^m} .$$

En spécialisant cette relation en $x = 1$ et $x = 1/2$, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire 6. Pour tout entier $m \geq 0$,

$$\xi_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} P_m(H_n^{(1)},\dots,H_n^{(m)}) ,$$

et

$$\alpha_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n} n^{k+1}} P_m(O_n^{(1)},\dots,O_n^{(m)}) ,$$

avec

$$O_n^{(m)} = 2^{-m} h_{n-1}^{(m)}(1/2) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)^m} ,$$

et

$$H_n^{(m)} = h_{n-1}^{(m)}(1) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^m} .$$

En particulier,

$$\xi_k(1) = \zeta(k+1) ,$$
$$\xi_k(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(1)}}{n^{k+1}} = \frac{1}{2}(k+3)\zeta(k+2) - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{k} \zeta(j)\zeta(k+2-j) ,$$

et pour tout entier $m \geq 0$,

$$\xi_1(m+1) = (m+1)\zeta(m+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} P_m(H_n^{(1)}, \ldots, H_n^{(m)}),$$

$$\alpha_1(m+1) = (2 - 2^{-m-1})(m+1)\zeta(m+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n} n^2} P_m(O_n^{(1)}, \ldots, O_n^{(m)}).$$

Remarque 13. Pour $k = 0$, la fonction ξ_k n'est pas définie car l'intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\mathrm{Li}_0(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} t^{s-1} \, dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} \, dt$$

diverge pour tout s. Cependant, au sens de la sommation de Ramanujan, d'après la première formule du Corollaire 6, on déduit du Corollaire 4 l'identité

$$\xi_0(m+1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{P_m(H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, \ldots, H_n^{(m)})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^{m+1}} \quad \text{pour tout entier naturel } m.$$

On déduit également du Corollaire 6 une intéressante réécriture de la formule sommatoire d'Ohno ([O2], Théorème 8).

Corollaire 7. Pour tout entier $k \geq 2$,

$$\sum_{m=0}^{k-2} \xi_{k-m-1}(m+1) = \sum_{m=0}^{k-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}} P_m(H_n^{(1)}, \ldots, H_n^{(m)}) = (2 - 2^{2-k})(k-1)\zeta(k).$$

En particulier, il en résulte que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(H_n^{(1)})^2}{n^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} = 2\zeta(2)\zeta(3) - \zeta(5).$$

Théorème 22. *Pour tout entier $k \geq 1$,*

$$2\alpha_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^{k+1}} = 2^{k-1} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{(\ln 2)^{k-j}}{(j-1)!(k-j)!} L_j,$$

avec

$$L_k = \int_0^{\pi} u \ln^{k-1}\left(2 \sin \frac{u}{2}\right) du.$$

Remarque 14. Avec les notations introduites par Lewin (cf. [L]), l'intégrale L_k n'est autre que $-\mathrm{Ls}_{k+1}^{(1)}(\pi)$.

Exemple 23.

$$\xi_1(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)}}{n^2}=2\zeta(3)\,,$$

$$\alpha_1(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}\frac{O_n^{(1)}}{n^2}=\frac{7}{2}\zeta(3)\,,$$

$$\xi_2(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(1)}}{n^3}=\frac{5}{4}\zeta(4)=\frac{\pi^4}{72}\,,$$

$$\alpha_2(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^3}=\frac{\pi^2}{2}\ln 2-\frac{7}{4}\zeta(3)$$

$$\alpha_2(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}\frac{O_n^{(1)}}{n^3}=7\zeta(3)\ln 2-\frac{\pi^4}{32}-8G(1)\,,$$

$$\alpha_3(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^2}{2}(\ln 2)^2-\frac{7}{2}\zeta(3)\ln 2+\frac{\pi^4}{96}+4G(1)$$

où $\quad G(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{O_n^{(1)}}{(2n)^3}\quad$ désigne la constante de Ramanujan ([Be] p. 257, [Si]).

Remarque 15. Comme

$$\frac{7}{8}\zeta(3)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^3}\quad\text{et}\quad\frac{\pi^3}{32}=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},$$

la formule

$$G(1)=\frac{7}{8}\zeta(3)\ln 2-\frac{\pi^4}{256}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}\frac{O_n}{(2n)^3}$$

déduite de l'évaluation de $\alpha_2(2)$, peut encore se réécrire

$$G(1)=2\ln(2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^3}-(\pi/8+\ln(2))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}\frac{O_n}{(2n)^3}\,,$$

qui est l'expression exacte la plus proche de la formule

$$G(1)=\frac{\pi}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)^3}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$$

donnée par Ramanujan dans le chapitre IX de ses *Notebooks* et qui s'est avérée erronée (cf. [Be] p. 257, [Si]).

6.2 Valeurs sur les entiers négatifs

Théorème 23 (valeurs aux entiers négatifs)**.** *Pour tout entier $k \geq 1$ et pour $\Re(x) > 0$, la fonction $s \mapsto \xi_k(s,x)$ se prolonge analytiquement dans $\mathbb{C}$ en une fonction entière. Les valeurs aux entiers négatifs de la fonction d'Arakawa-Kaneko sont données par :*

$$\xi_k(-n,x) = (-1)^n B_n^{(k)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

où les $B_n^{(k)}(x)$ sont les polynômes de poly-Bernoulli définis par la fonction génératrice :

$$e^{-xt}\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!}\,.$$

Remarque 16. Les polynômes $B_n^{(k)}(x)$ sont des polynômes de degré n en x. Pour $k = 1$, on retrouve (au signe près) les polynômes de Bernoulli classiques ([J]). Les nombres $B_n^{(k)} := B_n^{(k)}(0)$ sont les nombres de poly-Bernoulli introduits par Kaneko ([AIK]). On a l'expression suivante :

$$B_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}B_j^{(k)}x^{n-j}\,.$$

Les polynômes de poly-Bernoulli admettent l'expression explicite

$$(-1)^n B_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{(m+1)^k}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(x+j)^n\,.$$

Exemple 24. Pour de petites valeurs de k et n, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\xi_2(-1,x) &= -B_1^{(2)}(x) = x - \frac{1}{4}\,,\\
\xi_2(-2,x) &= B_2^{(2)}(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{36}\,,\\
\xi_2(-3,x) &= -B_3^{(2)}(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{24}\,,\\
\xi_3(-1,x) &= -B_1^{(3)}(x) = x - \frac{1}{8}\,,\\
\xi_3(-2,x) &= B_2^{(3)}(x) = x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{11}{216}\,,\\
\xi_3(-3,x) &= -B_3^{(3)}(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{11}{72}x + \frac{1}{288}\,.
\end{aligned}$$

7 La fonction zêta d'Arakawa-Kaneko alternée

Définition 25. On considère à présent la fonction zêta d'Arakawa-Kaneko alternée $\xi_k^*(s,x)$ définie pour $\Re(s) > 0$, $\Re(x) > 0$ et $k \geq 0$ par

$$\xi_k^*(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}} \operatorname{Li}_k(\frac{1-e^{-t}}{2})\, t^{s-1}\, dt$$

On s'intéresse tout particulièrement au cas où $x = 1/2$. Pour cela, on définit

$$\beta_k(s) := 2^{-s} \xi_k^*(s, \frac{1}{2}) \,.$$

En particulier, pour $k = 0$,

$$\beta_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^s} = \beta(s)$$

où β désigne la fonction bêta de Dirichlet ([RZ]). Autrement dit, la fonction β_k est une généralisation assez naturelle de la fonction bêta de Dirichlet .

7.1 Valeurs spéciales de la fonction β_k

Théorème 24. *Pour tout entier $m \geq 0$,*

$$\beta_k(m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^{k+1}} P_m(O_n^{(1)}, \ldots, O_n^{(m)}) \quad (k \geq 0) \,.$$

Exemple 25. Comme $\beta_0(s) = \beta(s)$, on en déduit que pour tout entier $m \geq 1$,

$$2\beta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n} n} P_{2m-1}(O_n^{(1)}, \ldots, O_n^{(2m-1)}) \,,$$

et

$$2\beta(2m+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n} n} P_{2m}(O_n^{(1)}, O_n^{(2)}, \ldots, O_n^{(2m)}) = (-1)^m \frac{E_{2m}}{(2m)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}$$

où les E_{2m} sont les nombres d'Euler. Si $G = \beta(2)$ désigne la constante de Catalan, il en résulte en particulier que

$$\begin{aligned}
2G &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(1)}}{n} \,, \\
\frac{\pi^3}{8} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{(O_n^{(1)})^2}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(2)}}{n} \,, \\
12\beta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{(O_n^{(1)})^3}{n} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(1)} O_n^{(2)}}{n} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(3)}}{n} \,.
\end{aligned}$$

Les valeurs de la fonction β_1 admettent une expression particulière.

Théorème 25 (Transformation d'Euler)**.** *Pour tout entier $m \geq 1$,*

$$\beta_1(m) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{O_n^{(m)}}{n} .$$

Exemple 26.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{O_n^{(1)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{16} ,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{O_n^{(2)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(1)}}{n^2} = \frac{7}{4}\zeta(3) - \frac{\pi}{2} G ,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{O_n^{(3)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{(O_n^{(1)})^2}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{O_n^{(2)}}{(2n)^2} = \frac{\pi^4}{64} - G^2 ,$$

où G désigne la constante de Catalan.

Théorème 26. *Pour tout entier $k \geq 1$,*

$$2\beta_k(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^{k+1}} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{2^{j-1} (\ln 2)^{k-j}}{(j-1)!(k-j)!} \tilde{L}_j$$

avec

$$\tilde{L}_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u \ln^{k-1}\left(2 \sin \frac{u}{2}\right) du .$$

Remarque 17. Avec les notations introduites par Lewin (cf. [L]), l'intégrale $\tilde{L}_k$ n'est autre que $-\mathrm{Ls}_{k+1}^{(1)}(\frac{\pi}{2})$.

Exemple 27. a) pour $k = 2$,

$$2\beta_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^3} = \frac{\pi^2}{8} \ln 2 + \pi G - \frac{35}{16}\zeta(3) ,$$

b) pour $k = 3$,

$$2\beta_3(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{16}(\ln 2)^2 + \pi G \ln 2 - \frac{35}{16}\zeta(3) \ln 2$$
$$+ \frac{7\pi^4}{768} + \frac{5}{2} G(1) \; + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{2n}^{(1)}}{(2n+1)^2} ,$$

où G et $G(1)$ désignent respectivement les constantes de Catalan et de Ramanujan.

Remarque 18. Par les mêmes méthodes que précédemment, on peut montrer que la fonction β_k se prolonge analytiquement dans tout $\mathbb{C}$ et que ses valeurs sur les entiers négatifs sont les nombres rationnels donnés par la formule

$$\beta_k(-n) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^{m+1}(m+1)^k} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (2j+1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

En particulier, pour $k = 0$,

$$2\beta_0(-n) = E_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^m} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (2j+1)^n ,$$

où les E_n sont les nombres d'Euler :

$$E_0 = 1,\ E_1 = 0,\ E_2 = -1,\ E_3 = 0,\ E_4 = 5,\ E_5 = 0,\ E_6 = -61, \text{ etc.}$$

On a aussi, pour $k = 1$,

$$\beta_1(0) = \frac{1}{2},\ \beta_1(-1) = \frac{1}{4},\ \beta_1(-2) = -\frac{1}{6},\ \beta_1(-3) = -\frac{1}{2}\,, \beta_1(-4) = \frac{7}{5}, \text{ etc.}$$

Références

[AIK] T. Arakawa, T. Ibukiyama, et M. Kaneko, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer Verlag, Tokyo, 2014.

[AK] T. Arakawa et M. Kaneko, Multiple zeta values, Poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 189-209.

[Be] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks Part I*, Springer Verlag, New York, 1985.

[Bl] I. V. Blagouchine, Expansions of generalized Euler's constants, *J. Number Theory* **158** (2016), 365-396.

[Br] D. Broadhurst, *Multiple zeta values and modular forms in quantum field theory*, in Schneider et Blümlein (eds.), Computer algebra in quantum field theory, Springer Verlag, 33-73, 2013.

[BH] A. Bayad et Y. Hamahata, Arakawa-Kaneko L-functions and generalized poly-Bernoulli polynomials, *J. Number Theory*, **131** (2011), 1020-1036.

[Ca] B. Candelpergher, *Ramanujan summation of divergent series*, Lecture Notes in Math. (2016), à paraître.

[Car] P. Cartier, Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents, *Séminaire Bourbaki*, 2000-2001, exp. n° 885, 137-173.

[Ch] K.-W. Chen, Generalized harmonic numbers and Euler sums, *International J. Number Theory* (2016), à paraître.

[Cho] J. Choi, Summation formulas involving binomial coefficients, harmonic numbers, and generalized harmonic numbers, *Abstract and Applied Analysis*, **2014** (2014), Article ID 501906, 10 pages.

[Co] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.

[CG] J. Conway et R. Guy, *The Book of Numbers*, Springer Verlag, New York, 1996.

[D] K. Dilcher, Some q-series identities related to divisors functions, *Discrete Math.* **145** (1995), 83-93.

[DB] A. Dil et K. Boyadzhiev, Euler sums of hyperharmonic numbers, *J. Number Theory*, **147** (2015), 490-498.

[DK] A. Davydychev et M. Kalmykov, Massive Feynman diagrams and inverse binomial sums, *Nuclear Physics*, **B 699** (2004), 3-64.

[H] M. Hoffman, Harmonic-number summation identities, symetric functions, and multiple zeta functions, *Ramanujan J.* (2016), à paraître.

[J] C. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York, 1965.

[KZ] M. Kontsevich et D. Zagier, *Periods*, in Engquist (ed.) et al., Mathematics unlimited - 2001 and beyond, Springer Verlag, 771-808, 2001.

[L] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland, New York, 1981.

[O1] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.

[O2] Y. Ohno, *Sum relations for multiple zeta values*, in Aoki (ed.) et al., Zeta functions, topology, and quantum physics, Dev. Math. **14**, 131-144, Springer Verlag, New York, 2005.

[Ra] S. Ramanujan, *Notebooks*, Vol. 2, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[Ro] G.-C. Rota, Formal power series of logarithmic type, *Advances in Math.* **75** (1989), 1-118.

[RZ] T. Rivoal et W. Zudilin, Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant, *Math. Ann.* **326** (2003), 705-721.

[Sa] Y. Sasaki, On generalized poly-Bernoulli numbers and related L-functions, *J. Number Theory*, **132** (2012), 156-170.

[Si] R. Sitaramachandrarao, A formula of S. Ramanujan, *J. Number Theory*, **25** (1987), 1-19.

[Su] Z.-H. Sun, Invariant sequences under binomial transformation, *Fibonacci Quart. 39* (2001), 324-333.

[Y1] P. T. Young, A 2-adic formula for Bernoulli numbers of the second kind and for the Nörlund numbers, *J. Number Theory*, **128** (2008), 2951-2962.

[Y2] P. T. Young, Rational series for multiple zeta and log gamma functions, *J. Number Theory*, **133** (2013), 3995-4009.

[Y3] P. T. Young, Symmetries of Bernoulli polynomial series and Arakawa- Kaneko zeta functions, *J. Number Theory*, **143** (2014), 142-161.

[Y4] P. T. Young, The p-adic Arakawa-Kaneko zeta functions, *J. Number Theory*, **155** (2015), 13-35.

[Za] D. Zagier, The Mellin transform and other useful analytic techniques, Appendix to E. Zeidler, *Quantum Field Theory I : Basics in Mathematics and Physics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (2006), 305-323.

[Zh] J. Zhao, *Multiple Zeta Functions, Multiple Polylogarithms and Their Special Values*, World Scientific, New Jersey, 2016.

[Zu] I. J. Zucker, On the series $\sum \binom{2k}{k}^{-1} k^{-n}$ and related sums, *J. Number Theory*, **20** (1985), 92-102.

Publications

[1] M-A. Coppo et P. T. Young, On shifted Mascheroni series and hyperharmonic numbers, *Journal of Number Theory* **169** (2016), 1-20.

[2] M-A. Coppo et B. Candelpergher, Inverse binomial series and values of Arakawa-Kaneko zeta functions, *Journal of Number Theory* **150** (2015), 98-119.

[3] B. Candelpergher et M-A. Coppo, Le produit harmonique des suites, *L'Enseignement mathématique*, **59** (2013), 39-72.

[4] B. Candelpergher et M-A. Coppo, A new class of identities involving Cauchy numbers, harmonic numbers and zeta values, *The Ramanujan Journal* **27** (2012), 305-328.

[5] M-A. Coppo et B. Candelpergher, The Arakawa-Kaneko zeta function, *The Ramanujan Journal*, **22** (2010), 153-162.

[6] M-A. Coppo, Nouvelles expressions des formules de Hasse et de Hermite pour la fonction zêta d'Hurwitz, *Expositiones Mathematicae* **27** (2009), 79-86.

[7] M-A. Coppo, Une histoire des séries infinies, *La Gazette des Mathématiciens*, **120** (2009), 39-52.

[8] M-A. Coppo, Sur les sommes d'Euler divergentes, *Expositiones Mathematicae*, **18** (2000), 297-308.

[9] M-A. Coppo, Nouvelles expressions des constantes de Stieltjes, *Expositiones Mathematicae*, **17** (1999), 349-358.

[10] B. Candelpergher, M-A. Coppo, et E. Delabaere, La sommation de Ramanujan, *L'Enseignement Mathématique*, **43** (1997), 93-132.

[11] M-A. Coppo et C. Walter, Composante centrale du lieu de Brill-Noether du schéma de Hilbert, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **200**, 341-349, Dekker, New York, 1996

[12] M-A. Coppo, Une généralisation d'un théorème de Cayley, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Série I : Mathématiques, **314** (1992), 613-616.

[13] M-A. Coppo, Familles maximales de systèmes de points surabondants, *Mathematische Annalen*, **291** (1991), 725-735.